PROBLEMAS PROPUESTOS

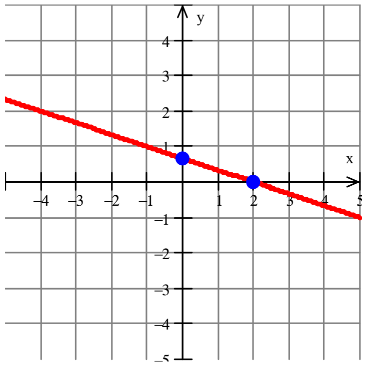
1. Representar las siguientes funciones calculando en cada caso sus elementos característicos según su tipo:

$$a)\ f(x)=\frac{2-x}{3} \qquad b)\ g(x)=-2x^2+3x-1$$

Resolución:

a) Es una función lineal que podemos escribir de la forma $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$. Si hacemos una pequeña tabla de valores se obtiene la gráfica de la derecha:

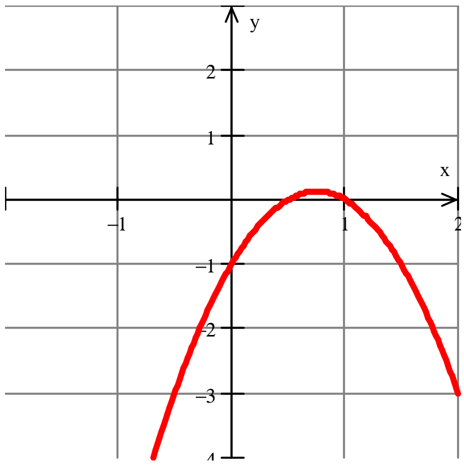
x	y
0	2/3
2	0



b) Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica como sabemos es una parábola:

1º) Curvatura: $\cap$ ya que $a=-2<0$.

2º) Vértice: $\begin{cases} x_V=\dfrac{-3}{2(-2)}=\dfrac{3}{4}=0.75 \\ y_V=f(3/4)=-2(3/4)^2+3(3/4)-1=1/8=0.125 \end{cases}$



3º) Puntos de corte con ejes:

$$\begin{cases} x:-2x^2+3x-1=0 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \\ \quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3-1}{4}=1/2 \\ x_2=\dfrac{3+1}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow (1/2,0) \text{ y } (1,0) \\ y: x=0 \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow (0,-1) \end{cases}$$

2.- Dada la función $y=f(x)=\dfrac{x+2}{x}$:

a) Hallar su dominio.

b) Hallar sus puntos de corte con los ejes.

c) Hallar sus asíntotas verticales y horizontales determinando la posición de la gráfica respecto a ellas

d) Representarla gráficamente.

Resolución:

a) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**:

Con y: $x=0 \Rightarrow$ No está definida $\Rightarrow$ no corta . Con x: $\dfrac{x+2}{x}=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow \boxed{(-2,0)}$

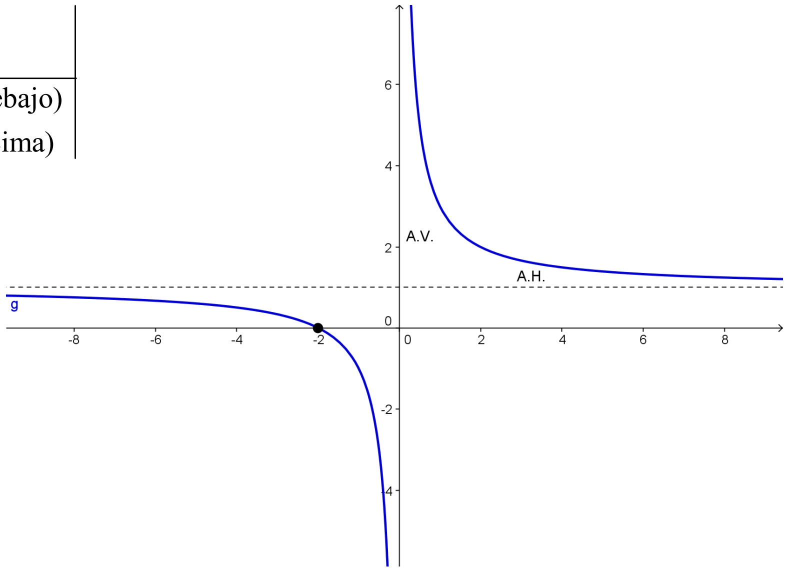
c) **Asíntota Vertical**: Recta $x=0$. Para determinar la posición de la curva respecto a la asíntota hallamos lo límites laterales haciendo:

x	$\frac{x+2}{x}$	
<0	$+/- \Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+2}{x}=-\infty$ (abajo)
>0	$+/+ \Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x}=+\infty$ (arriba)

<u>Asíntota horizontal</u>: $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}=\frac{1}{1}=1$. Hacemos una tabla de valores para estudiar la posición de la gráfica respecto a ella:

	x	$\frac{x+2}{x}$
$x\to-\infty$	-100	$-98/-100<1$ (por debajo)
$x\to+\infty$	100	$102/100>1$ (por encima)

Gráfica:



3.- Dada la función $y=f(x)=\frac{1-2x}{x+1}$, representarla gráficamente hallando los elementos característicos necesarios para realizarla.

<u>Resolución</u>:

1º) Dominio: $x+1=0\Rightarrow x=-1$. Luego $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

2º) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases}\text{eje } y: x=0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow \boxed{(0,1)}\\ \text{eje } x: f(x)=0\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{2},0\right)}\end{cases}$

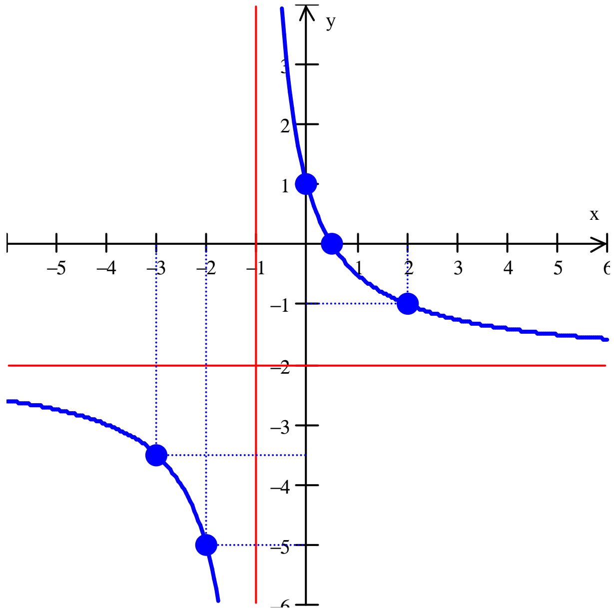
3º) Asíntotas: A. Vertical: $\boxed{\text{Recta } x=-1}$. Posición de la gráfica respecto a ella: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1-2x(+)}{x+1(-)}=-\infty \text{ (abajo)}\\ \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1-2x(+)}{x+1(+)}=+\infty \text{ (arriba)}\end{cases}$

A. Horizontal: Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{x+1}=\frac{-2}{1}=-2$ es la $\boxed{\text{recta } y=-2}$.

Posición de la gráfica respecto a la A.H.: $\begin{cases}Si\, x\to+\infty \text{ entonces } \frac{1-2x}{x+1}>-2 \text{ (por encima)}\\ Si\, x\to-\infty \text{ entonces } \frac{1-2x}{x+1}<-2 \text{ (por debajo)}\end{cases}$

Podemos completar con algunos puntos más:

x	-3	-2	2
y	-3.5	-5	-1



4.- Representar gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$. A la vista de su gráfica deducir sus puntos de discontinuidad, si los tiene, y clasificarlos.

Resolución:

Diagrama de distribución:

$-x^2-4x-3$		$x+1$		x^2-4x+3
Parábola	-1]	0 Recta	[1	Parábola

Trozo 1: $(-\infty,-1]$: 1º) Curvatura $=\cap$. 2º Vértice: $\boxed{V(-2,1)}$.

3º) Puntos de corte con ejes: eje $y:(0,-3)$ (pero no cae en su zona) . Eje $x:(-3,0)$ y $(-1,0)$.

4º) Punto final (●): $x=-1\Rightarrow y=0\Rightarrow \boxed{(-1,0)}$

Trozo 2: Intervalo $(-1,1)$: Tabla: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 0.5 \\ y & 1 & 1.5 \end{array}$. Punto inicial (○): $x=-1\Rightarrow y=-1+1=0\Rightarrow \boxed{(-1\,,0)}$

Punto final (○): $x=1\Rightarrow y=1+1=2\Rightarrow \boxed{(1\,,2)}$

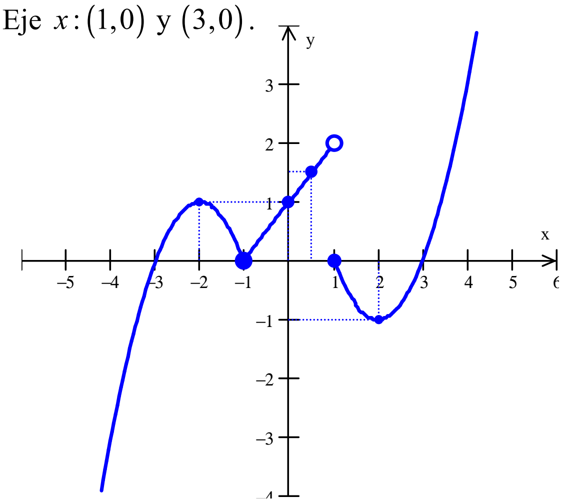
Trozo 3: $[1,+\infty)$: 1º) Curvatura $=\cup$. 2º Vértice: $\boxed{V(2,-1)}$.

3º) Puntos de corte con ejes: eje $y:(0,3)$ (pero no cae en su zona). Eje $x:(1,0)$ y $(3,0)$.

4º) Punto inicial (●): $x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow \boxed{(1,0)}$

Representación gráfica: (a la derecha)

Tiene un punto de discontinuidad en $x=1$ y es de salto finito.



5.- Representar gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x<2\\ \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$

Resolución:

1º Trozo: En el intervalo $(-\infty,0]$: Es la parábola de ecuación $y=x^2+2x+1$. Elementos característicos:

Curvatura$=\cup$. Vértice: $V(-1,0)$ Ptos. de corte con ejes: $\begin{cases}\text{eje } y:(0,1)\\ \text{eje } x:(-1,0)\end{cases}$ Otros puntos:

x	-3	-2
y	4	1

Punto final (●): $\boxed{(0,1)}$

2º Trozo: En el intervalo $(0,2)$: Es una hipérbola. Elementos característicos:

No definida en 0 pero no está en el intervalo de definición. As. Vertical: $x=0$ y además $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\,(\text{arriba})$.

As. Horizontal (a la derecha): $y=0\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\right)$.

Puntos de corte con ejes: $\begin{cases}\text{eje } y:\text{no tiene y además 0 no está en intervalo}\\ \text{eje } x:\text{No tiene ya que } \dfrac{1}{x}=0 \text{ no tiene solución}\end{cases}$. Punto inicial (○): En $x=0$ tiene asíntota vertical y está en $+\infty$. Punto final (○): $\boxed{(2,0.5)}$. Punto intermedio por el que pasa $(1,1)$

3º Trozo: En el intervalo $[2,+\infty)$: Es una recta. Tabla de valores:

x	2	4
y	0.5	1

. Punto de partida (●): $\boxed{(2,0.5)}$

Con todo esto se obtiene la gráfica: